

ESTRATEGIA DE RESOLUCION DE PROBLEMAS (ERP) PARA FORTALECER EL AUTOAPRENDIZAJE

M.L. Saavedra Q.¹ - M.A. Vega U².

1. Universidad de Santiago de Chile - 2. Universidad de Chile

RESUMEN.

Con el propósito de apoyar a los estudiantes de ingeniería en fortalecer su capacidad de autoaprendizaje, para mejorar los rendimientos académicos en las asignaturas de Ciencias Básicas del Primer ciclo de Ingeniería, se desarrolló una Estrategia de Resolución de Problemas (ERP), basada en el Método de George Pólya, considerando los análisis realizados posteriormente por Alan Schönfeld y la incorporación de aspectos metacognitivos

La estrategia es enseñada en la asignatura de Métodos de Estudio, de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ingeniería, de la Universidad de Santiago de Chile, que es cursada por todos los estudiantes que ingresan al primer nivel.

La propuesta plantea que junto al desarrollo matemático, que considera como referente el Método de Pólya, se realice la "Verbalización del pensamiento" (metacognición), que permite identificar los procesos mentales involucrados (factores cognitivos o acciones mentales) y, como consecuencia, lograr que el estudiante sea consciente de su pensamiento de manera que el aprendizaje sea significativo.

La verbalización del pensamiento le permite al estudiante, en cada etapa de la resolución de un problema, conocer sus fortalezas y debilidades para corregir los niveles previos de aprendizaje no alcanzados y que son requeridos para la solución del problema que se plantea, mejorar técnicas que le permitan desarrollar habilidades y destrezas, dejar documentos ordenados y explicativos de la dinámica de resolución, que sirva como material de estudio posterior.

Para facilitar el desarrollo de la estrategia se diseñó, un formato especial que contiene dos dimensiones, una para el desarrollo verbal que considera el proceso mental de análisis y la otra para el desarrollo matemático que considera como referencia el Método de Pólya.

La principal resistencia, que presentan los estudiantes en un principio, al aplicar la estrategia se relaciona con el desarrollo verbal de los problemas, que evidencia el poco desarrollo de la habilidad lingüística asociada a la comprensión lectora y a la habilidad de expresión oral y escrita. En la medida, que van comprendiendo y aplicando, los estudiantes cambian su actitud, reconociendo y aceptando la utilidad de desarrollar el proceso metacognitivo asociado a "verbalizar el pensamiento". En este proceso, el trabajo colaborativo con sus pares es fundamental.

Para evaluar el impacto de esta estrategia, se realizó una encuesta, a todos los estudiantes, que evidenció que el 59% de los estudiantes considera que la estrategia es útil, el 50% afirma que logró mejorar los resultados de aprendizaje y menos del 10% la consideran poco útil.

Palabras claves: Aprendizaje Autónomo, Factores Cognitivos, Resolución de Problemas,

1. INTRODUCCIÓN

Dada la importancia que tiene la Matemática, para la formación de profesionales en las carreras científicas, tecnológicas y de las ciencias de la ingeniería, por mencionar algunas, se requiere que la docencia en esta disciplina se encuentre en un proceso continuo de evaluación y mejoramiento de la calidad de su enseñanza. Esto con el fin de estar en condiciones de preparar al profesional del nuevo milenio, para que su integración a la sociedad sea efectiva, y suponga un aporte original y una fuente de constante innovación. Estas características surgen como resultado de un desarrollo mental creador, que se puede lograr a través del proceso educativo, desarrollando las potencialidades del individuo, logrando una formación integral de éste.

En general, en Chile los resultados académicos de los primeros años en las carreras científicas universitarias son bajos, entre 40 y 60% de aprobación, con tasas de retención del orden de 70% al primer año [1]. Esto se explica por la débil formación de los jóvenes en la educación preuniversitaria, como lo muestran los análisis de las pruebas SIMCE y PISA aplicadas en los últimos años [2].

En el contexto universitario, esta desigualdad en educación, ha dejado fuera del sistema a los quintiles más bajos, quienes no tienen acceso a la educación superior, o en su defecto quienes logran ingresar son eliminados en los primeros años o deben cursar 2 o 3 veces las asignaturas alargando la duración normal de las carreras universitarias. Las acreditaciones de las carreras de educación superior, muestran que los estudiantes tardan 1 a 2 años más sobre lo planificado, así una carrera que en su plan de estudios contempla 6 años, en la realidad un estudiante tarda 7 a 8 años en titularse. Además, solo el 54,8% de los estudiantes que ingresan a la Universidad se titulan, mientras que en los Institutos profesionales esta cifra disminuye a 27% y en Centros de Formación Técnica solo alcanza a 18% [3].

En el panorama global nos encontramos con una educación segregada según estatus socioeconómico y con estudiantes que acceden a la educación superior sin la formación requerida para ser exitosos, que deben nivelarse los primeros años de universidad y que por ese motivo permanecen en la educación superior 1 a 2 años más de lo estipulado en los programas que cursan.

Este panorama ha motivado a las instituciones de educación superior a incorporar planes de apoyo de inserción universitaria en los primeros años, para mejorar los indicadores de retención y titulación que afectan negativamente los procesos de acreditación.

La Facultad de Ingeniería de la Universidad de Santiago de Chile, desde al año 2008 comenzó a realizar una serie de estudios y de iniciativas orientadas a nivelar a los estudiantes que ingresan a sus carreras. De los estudios de perfil de ingreso de los estudiantes y de los resultados de las intervenciones realizadas, se realiza una modificación al plan de estudios a partir del año 2012, denominado Módulo Básico de Ingeniería, que incorpora asignaturas tipo talleres orientadas a desarrollar habilidades generales, actitudes y valores como aprendizaje autónomo, trabajo colaborativo, liderazgo, comunicación efectiva responsabilidad profesional, disposición al emprendimiento y la innovación entre otras. Entre estas iniciativas se han creado talleres con el propósito de potenciar las competencias declaradas en el perfil de egreso.

Primero, desarrollar la capacidad de autoaprendizaje mediante el conocimiento y la práctica de técnicas y estrategias de estudio y el desarrollo de la metacognición, habilidades necesarias para abordar con éxito la "Resolución de problemas".

Segundo, favorecer el autoconocimiento, el reconocimiento de potencialidades, habilidades y debilidades personales en los estudiantes en relación al aprendizaje; y desarrollar

habilidades mediante técnicas para mejorar los niveles de atención y concentración, estrategias de estudio, conocimiento de las distintas formas en que aprende el ser humano.

La hipótesis que se plantea considera que es posible lograr un cambio en la actitud del estudiante que influya positivamente en su aprendizaje, para que sea capaz de reconocer sus potencialidades, habilidades y debilidades personales, para mejorarlas y aprovecharlas en beneficio propio. partiendo porque adquieran una Estrategia de Resolución de Problemas que les permita enfrentar de forma estructurada el estudio, al hacer consciente la estructura de pensamiento a través de la verbalización, para aprovechar al máximo las habilidades y destrezas y evidenciar actitudes que entorpecen el desarrollo lógico del pensamiento.

2.- MARCO TEÓRICO

2.1- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. Es sabido que, en aquellas carreras donde las matemáticas forman la base para construir nuevos conocimientos y sustentar otras disciplinas, existen dificultades de distinta índole al pasar del manejo conceptual y algorítmico a la aplicación en la Resolución de Problemas.

Por lo tanto, es necesario indagar y diseñar estrategias didácticas que permitan desarrollar habilidades en los estudiantes, con objetivos observables asociados a acciones concretas observables también, que implican verbos de acción como explicar, calcular, modelar, diseñar, para mejorar el desempeño y favorecer la formación profesional [4].

La resolución de Problemas es considerada actualmente la parte más importante de la educación matemática, puesto que a través de la resolución de problemas, los estudiantes pueden experimentar la potencia y la utilidad de las matemáticas. El estudiante debe enfrentarse primero a un problema que involucre una solución con desarrollo matemático, que lo motive (al estudiante) a proponer una solución y luego demostrarla matemáticamente, proceso similar al que ocurre cuando se experimenta en cualquier ciencia [5].

Por citar algunos puntos de vista, el National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M.) señaló, hace más de diez años, que “el objetivo fundamental de la enseñanza de las matemáticas no debería ser otro que el de la resolución de problemas”.

George Pólya en 1968 [6], señaló: “Está bien justificado que los textos de matemáticas, contengan problemas. Los problemas pueden incluso considerarse como la parte más esencial de la educación matemática”.

Por otra parte, el destacado matemático Miguel de Guzmán comentó en 1984 [7], que “lo que todo deberíamos proporcionar a nuestros estudiantes a través de la matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos”. Resumiendo sus ideas, argumenta, “...del enfrentamiento con problemas adecuados, es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas”. La lista de investigadores en este ámbito es extensa y no es el propósito de este artículo. El manejo y uso de un lenguaje requiere de unos conocimientos mínimos para poder desarrollarse. Pero, sobre todo se necesitan situaciones que inviten a comunicarse por medio de ese idioma, a esforzarse en lograrlo y de técnicas para hacerlo. En el caso del lenguaje matemático, una de las técnicas fundamentales de comunicación son los métodos de Resolución de Problemas.

2.2. METODO DE G. POLYA. El método de George Pólya, (figura 1), propone 4 etapas para la resolución de problema que se inicia con la etapa de “Comprender el problema”, que sugiere la extracción de la información relevante del problema y que pueda aportar a visualizar una solución factible. La segunda etapa de la Estrategia, corresponde a

“Configurar un plan”, que considera seleccionar las estrategias y las técnicas a utilizar para resolver el problema, evaluar las distintas opciones de solución y diseñar un plan de resolución. Esta etapa requiere que el estudiante utilice sus conocimientos previos y sea capaz de visualizar qué otro conocimiento, habilidad o destreza debe adquirir para resolver el problema.

La tercera etapa es “Ejecutar el plan”, que corresponde a la mecánica de la solución, en la medida que el estudiante haya dedicado mayor preocupación en las etapas uno y dos, la tercera etapa se vuelve más dinámica y sencilla, porque el estudiante hace uso de las habilidades y destrezas adquiridas previamente. La última etapa del método, “Mirar hacia atrás”, hace referencia a la necesidad de analizar los resultados obtenidos, expresar la solución y verificar si esta responde al problema planteado. También sugiere proponer otra alternativa de solución más sencilla o confiable, cuando sea posible.

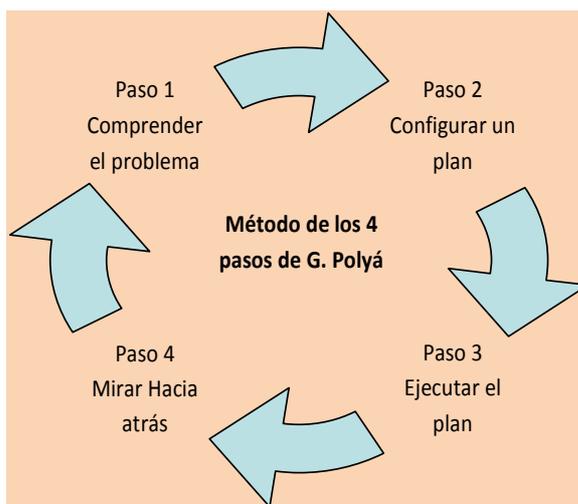


Figura 1. Método de G. Pólya para Resolución de Problemas

La metodología de Pólya, posee tres etapas orientadas al análisis y diseño, y una asociada a la mecánica de resolución, lo que sugiere el predominio de factores cognitivos como comprender, visualizar, diseñar, analizar, interpretar entre otros, por sobre la ejecución, que es una etapa de carácter técnico.

La metodología de Pólya, desde la mirada del profesor, es un buen elemento a solicitar en la resolución de controles y pruebas, porque obliga al estudiante a contestar en forma ordenada y en una secuencia lógica, facilitando la revisión posterior.

2.3.-FACTORES QUE INTERVIENEN EN EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. En la resolución de problemas intervienen una serie de factores, tanto personales como ambientales o contextuales. Entre los factores personales encontramos factores cognitivos, asociados a los conocimientos previos, al desarrollo de habilidades del pensamiento y factores afectivos, como motivaciones, perseverancia, estrés, resiliencia, autocontrol del progreso intelectual. Los factores ambientales se asocian a la calidad de la educación recibida que influye en las habilidades y destrezas desarrolladas, la disponibilidad de recursos y elementos que faciliten el estudio. Los estudiantes se desenvuelven en distintos contextos tanto familiares, como escolares y comunitarios que influyen en su aprendizaje académico

2.4.-ESTILOS DE APRENDIZAJE. Para que las herramientas a utilizar sean efectivas es necesario conocer cuáles son los estilos de aprendizaje y los canales de comunicación predominantes en los estudiantes, para considerar estos elementos en la estrategia a desarrollar.

Kolb propone el Inventario de Estilos de Aprendizaje, instrumento que detecta como el estudiante percibe y maneja la información, que ha sido ampliamente utilizado y validado en medios académicos. Identifica los estilos de aprendizaje según las preferencias de cada individuo por cuatro formas distintas de aprender: la conceptualización abstracta (CA), la experiencia concreta (EC), la observación reflexiva (OR) y la experimentación activa (EA). CA y EC son modos de adquirir información nueva. Ambos son polos de un continuo, con el pensamiento analítico y formación de conceptos (CA) en un extremo y el aprendizaje experiencial y emocional (EC) en el otro. Por otra parte, en cuanto al procesamiento de la información, la preferencia por escuchar y observar (OR) se ubica en un extremo, y la disposición a actuar o tomar decisiones (EA) en el otro [8].

La combinación de preferencias para adquirir y procesar la información define cuatro tipos de aprendices. El Asimilador (CA y OR) que tiende a aprender sistematizando la información en teorías unificadoras o patrones, y reflexiona acerca de ellos sin mucho interés en su aplicación práctica. El Convergente (CA y EA), que aprende al aplicar el conocimiento a problemas luego de generar modelos hipotéticos. El Divergente (EC y OR), que tiene facilidad para aprender de la experiencia una vez que la ha considerado desde múltiples perspectivas. Y, finalmente, el Acomodador (EC y EA), que aprende mejor haciendo.

Para identificar los canales de comunicación predominantes en el proceso de aprendizaje el Instituto Chileno de Programación Neurolingüística, ha elaborado y estandarizado que determina si el estudiante es preferente ante el estímulo visual, auditivo o kinestésico.

3.- DESCRIPCIÓN DE LA ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (ERP)

Los resultados obtenidos, del test aplicado en el periodo 2012 a 2015, muestran que el 44% de los estudiantes de ingeniería de primer año, poseen como canal predominante de comunicación el visual, 28% es kinestésico, 14% el auditivo, el % restante tiene predominio de visual-kinestésico o auditivo- kinestésico. Lo que demuestra que los estudiantes necesitan herramientas esquemáticas que potencien el estudio y el aprendizaje, y requieren además “hacer” para aprender, mientras que un porcentaje menor tiene predominio auditivo. Este resultado resalta la necesidad de cambiar a estructura de las clases desde expositivas a prácticas.

El test de KOLB, aplicado muestra que el 70% de los estudiantes, tiende a aprender a través del análisis y la conceptualización, aprenden mejor ante experiencia estructurada y tienden a frustrarse o distraerse fácilmente ante clases expositivas (Conceptualización abstracta), mientras que el otro porcentaje predominante de 17% cae en la categoría de Experiencia Concreta, es decir tendencia a aprender basada en la experiencia y a través de ejemplos específicos, tienden a aprender más de sus iguales que de superiores y requieren retroalimentación permanente.

Los resultados de ambos test coinciden en la necesidad de estructurar clases tipo taller donde los estudiantes aprendan haciendo y disminuir los tiempos de exposición del profesor. En el caso de ingeniería la resolución de problemas es una metodología fundamental para desarrollar habilidades asociadas a perfil de egreso, y en ese contexto es necesario constar con herramientas que faciliten el uso de esta metodología durante la etapa de estudio y aprendizaje.

3.1.- ERP, ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS BASADA EN EL MÉTODO DE PÓLYA. Tomando como base la metodología de Pólya de cuatro etapas, se propone una estrategia que ayude al estudiante a organizar el pensamiento durante la etapa de estudio y aprendizaje, que le permita, primero, identificar si posee los conocimientos previos requeridos para entender el problema que se le ha planteado, segundo, darse cuenta si posee las habilidades y destrezas que le permitan ejecutar el desarrollo para llegar a una

solución efectiva y tercero desarrollar la capacidad de análisis que le permita que el estudio sea efectivo y significativo (Figura 2).

ERP, no es aplicable para responder los test o pruebas, en este aspecto el método de Pólya ya cumple este objetivo. La estrategia se diseñó para su aplicación durante la etapa de estudio y aprendizaje, para el desarrollo de problemas matemáticos de las asignaturas del área matemática, química y física, por estudiantes de primer año de universidad, de manera organizar el estudio y potenciar el autoaprendizaje.

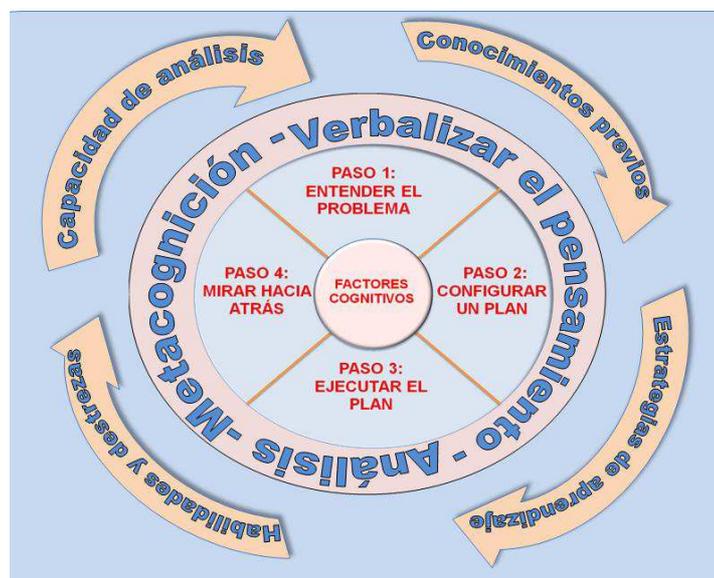


Figura 2. ERP, Estrategia de Resolución de problemas

La propuesta plantea que junto al desarrollo mediante Método de Polyá, se realice la "Verbalización del pensamiento" (metacognición), para que el estudiante sea consciente de su pensamiento de manera de autoregular el aprendizaje, identificar los procesos mentales involucrados (factores cognitivos) cuando se soluciona un problema, evidenciar el conjunto de información, reglas, interpretaciones, conexiones dentro de un contexto que se requieren para resolver el problema y, como consecuencia, transferir el conocimiento a otras situaciones similares [9]. La verbalización del pensamiento le permite al estudiante en cada etapa de resolución de un problema, darse cuenta de sus fortalezas y debilidades para corregir, los niveles previos de aprendizaje no alcanzados y que son requeridos para la solución del problema que se plantea, mejorar técnicas que le permitan desarrollar habilidades y destrezas, dejar documentos ordenados y explicativos de la dinámica de resolución, que sirva como material de estudio posterior.

Como beneficio secundario, cuando el estudiante se obliga a describir verbalmente su pensamiento, desarrolla la capacidad de comunicación efectiva, es decir la capacidad de expresar verbalmente lo que está pensando. Esta actividad además, requiere que el estudiante piense y seleccione las palabras adecuadas que describan lo que piensa, para ello en clases previas a la enseñanza de la estrategia, los estudiantes, trabajan con una psicóloga-educativa, los factores biopsicosociales que afectan el aprendizaje y practican el uso de operaciones mentales: Percibir, Observar, Interpretar, Analizar, Asociar, Clasificar, Comparar, Relacionar (Analogías), Expresar, Retener, Sintetizar, Deducir, Generalizar, Evaluar, seleccionar, describir entre otras.

Para facilitar el desarrollo de ERP se diseñó un formato especial para que los estudiantes trabajen en forma estructurada durante la resolución de los problemas, que consta de una planilla de respuesta con dos columnas una para el desarrollo verbal que considera el

proceso mental de análisis y la otra para el desarrollo matemático que considera como referencia el Método de Pólya (Figura 3).

La columna de operaciones mentales, se utiliza para que el estudiante redacte usando factores cognitivos (ejemplo de la taxonomía de Bloom o Marzano) las operaciones mentales realizadas en cada etapa del desarrollo matemático, de manera que en forma consciente, vaya paso a paso describiendo como ha ido pensando y que decisiones ha debido tomar para desarrollar el problema. En la columna de desarrollo matemático se pide al estudiante que siguiendo la metodología de Pólya realice el desarrollo matemático del problema, presentación de los datos, cálculos y análisis de la solución.

ETAPA DEL METODO DE G. POLYÁ	
DESARROLLO MENTAL (OPERACIONES MENTALES)	DESARROLLO MATEMATICO

Figura 3.- Planilla para resolución de problema

3.2.-APLICACIÓN Y EVALUACIÓN DE ERP, la estrategia diseñada se presenta y se lleva a la práctica con estudiantes de ingeniería de la Universidad de Santiago de Chile, en las 30 coordinaciones de la asignatura denominada Métodos de Estudio, que se imparte a estudiantes de primer año de ingeniería. En la primera versión se trabajó con estudiantes que ingresaron a la universidad el primer semestre del año 2012, y a diciembre de 2015 ha sido enseñada a más de 7000 estudiantes.

Considerando que cada coordinación tiene entre 60 y 70 estudiantes, de manera de hacer más efectiva la enseñanza de la estrategia, se realizan talleres grupales de 2 a 3 integrantes, que consisten en la resolución de problemas contextualizados del área de las matemáticas, física, química y otros, en general extraídos de los contenidos programáticos de las asignaturas del plan de estudio. Adicionalmente, para motivar a los estudiantes a utilizar esta estrategia, se consideran problemas de lógica con enunciados lúdicos, que los enfrentaban a un problema matemático desafiante.

Como evaluación, al finalizar el taller, los estudiantes deben desarrollar un problema de cualquier disciplina que están cursando. Esta actividad incluye la entrega de un informe y una exposición presencial con apoyo virtual. La evaluación se realiza con una rúbrica que considera: Contenido de la presentación, Organización del material, Material presentado, Cohesión del grupo de trabajo y Calidad de la Exposición. En el ítem contenido de la presentación se evalúa la habilidad de lectoescritura para la descripción verbal de la estrategia y el desarrollo matemático del problema. En anexo, se presenta un ejemplo de aplicación de ERP extraída de los trabajos presentados por los estudiantes.

4.- RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA APLICADA EN LA ASIGNATURA DE MÉTODOS DE ESTUDIO

La aplicación de ERP evidenció que los estudiantes de ingeniería, que ingresan a la universidad, no poseen una metodología que les permita trabajar en forma ordenada, secuencial y lógica aplicable a la resolución de un problema. Además, presentan problemas

de comprensión lectora, de comunicación oral y escrita, que afecta su capacidad de comprender un problema disciplinar y de plantear soluciones adecuadas.

Cuando se les solicita a los estudiantes que apliquen ERP, la principal resistencia se presenta en desarrollar verbalmente los problemas, debido a la dificultad en el uso del lenguaje y que evidencia que esta habilidad está poco desarrollada. Como respuesta actitudinal suelen colocar una barrera asociada a expresiones tales como “no lo entiendo” o “no me sirve” de manera de justificar la debilidad de esta competencia.

En la medida que los estudiantes van comprendiendo y aplicando ERP, cambian su actitud, reconociendo y aceptando la utilidad de desarrollar el proceso metacognitivo asociado a “verbalizar el pensamiento”. En este proceso, el trabajo colaborativo con sus pares es fundamental, porque permite bajar los niveles de ansiedad, frustración para comenzar a construir y desarrollar la expresión oral, comprendiendo la utilidad de la aplicación de estas estrategias en el proceso de estudio y aprendizaje de las asignaturas disciplinares.

Para evaluar los resultados de la intervención educativa, se aplicó una encuesta en 21 de las 30 coordinaciones del curso de Métodos de estudio de primer semestre de 2013, donde se aplicó la estrategia. Cada coordinación incluía entre 60 a 70 estudiantes.

De los resultados cuantitativos y cualitativos, se aprecia, que ERP cumple su función, el 59% de los encuestados considera que la estrategia es útil, el 50% afirma que logró mejorar los resultados de aprendizaje y menos del 10% de estudiantes la consideran poco útil.

Desde la perspectiva de los estudiantes, estos se pueden clasificar en las siguientes categorías:

1. Estudiantes que comprendieron ERP y lograron aplicarla, reconociendo que les permitió hacer un estudio más efectivo en las asignaturas que estaban cursando.
2. Estudiantes que comprendieron ERP pero que no lograron asimilarla completamente para hacer más efectivo su estudio.
3. Estudiantes que no comprendieron ERP o no se motivaron a utilizar la estrategia.

Desde la perspectiva de los profesores, ERP potencia la metocognición y entrega una estrategia que permite resolver problemas en forma ordenada, potenciando el trabajo colaborativo. En un principio, los estudiantes muestran una resistencia a desarrollar verbalmente los problemas, porque están acostumbrados a aplicar conceptos en forma mecánica. Presentan dificultades para expresar en palabras el desarrollo de las etapas del método, pero una vez superada esta barrera logran comprender el proceso metacognitivo de la estrategia y la utilidad de su aplicación.

5.- CONCLUSIONES

ERP permite desarrollar en el estudiante la habilidad de resolver problemas, a través del desarrollo metacognitivo, asociado al análisis de la información, la planificación, el uso de herramientas eficaces, la evaluación del conocimiento y la visualización de diversos escenarios.

La complejidad de ERP se presenta principalmente en el desarrollo verbal, más que el matemático, por lo tanto su aplicación favorece el desarrollo de habilidades de comunicación oral y escrita.

ERP se presenta como una herramienta útil para fortalecer la etapa de estudio y aprendizaje permitiendo desarrollar habilidades orientadas a estructurar la comprensión de los problemas y plantear soluciones en forma ordenada y lógica.

6.- ANEXO

El abrevadero de la figura se debe construir con las dimensiones que se indican. Solo se puede variar el ángulo θ . ¿Qué valor de θ maximizará el volumen del abrevadero?

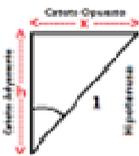


PASO 1: COMPRENDER EL PROBLEMA	
DESARROLLO VERBAL Operaciones mentales	DESARROLLO MATEMÁTICO
<p>1. Entender el problema: ¿Qué se espera al resolver el problema? Conocer el valor de θ que maximizará el volumen del abrevadero.</p> <p>2. Reconocer la información: ¿Cuáles son los datos entregados? ¿Cuáles son las Incógnitas? Datos proporcionados: - Esquema del abrevadero - Dimensiones del abrevadero</p> <p>Incógnitas del problema: - Angulo θ - Longitudes de ciertos lados para plantear ecuaciones.</p> <p>Operaciones mentales involucradas: En esta parte se comprende esencialmente los datos entregados explícitamente en el problema, además de las conclusiones que se pueden sacar de las imágenes junto a este, para su posterior resolución</p>	<p>Esquema:</p> <p>Datos de las dimensiones otorgados:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Largo abrevadero: 20 <input type="checkbox"/> Contorno de extremos: <ul style="list-style-type: none"> -Lado triángulos: 1 y 1 respectivamente -Lado cuadrilátero: 1 <input type="checkbox"/> Valor variable: angulo θ <p>Tener presente que los dos triángulos formados por el trapecio son congruentes. Además que los trapecios de ambos lados son iguales.</p>

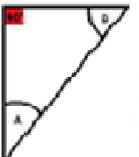


PASO 2: CONFIGURAR UN PLAN	
DESARROLLO VERBAL Operaciones mentales	DESARROLLO MATEMÁTICO
<p>1. Seleccionar un modelo matemático. Se desarrollará el problema haciendo uso de incógnitas y ecuaciones, aplicando conocimientos adquiridos en cálculo 1.</p> <p>2. Seleccionar una o más estrategias. Como estrategia, seguiremos los siguientes pasos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Asociar el abrevadero a figuras geométricas conocidas. - Establecer relaciones entre la figura original (abrevadero) y la geométrica: lados, ángulos, altura, etc. - Establecer una ecuación que considere a la figura en su totalidad, o bien, la extensión que se quiere estudiar. - Aplicar derivadas a la ecuación determinada y encontrar sus raíces. <p>Cabe hacer notar que utilizaremos esta última estrategia, por ser el método más preciso y eficiente para desarrollar un ejercicio de optimización, como es en este caso.</p> <p>Operaciones mentales involucradas: Comparación Pensar si acaso nos hemos enfrentado a un problema similar anteriormente, y si la manera de solucionarlo esa vez, podría servir en este caso.</p>	<p>Primero notamos que la sección transversal del abrevadero corresponde a un trapecio isósceles, y asociamos cada uno de los lados como se muestra en la siguiente imagen:</p> <p>b = Base menor B = Base mayor h = Altura</p> <p>Como se tiene la base menor y la altura, queda por determinar la base mayor.</p> <p>Por el momento se tiene: $b = 1$ [m] $B = 2x + 1$ [m]</p> <p>Hace falta determinar x</p>



PASO 3: EJECUTAR EL PLAN	
DESARROLLO VERBAL Operaciones mentales	DESARROLLO MATEMÁTICO
<p>1. Empezar por ordenar los datos. Una vez que logramos realizar los pasos anteriores debemos proceder a aplicar ecuaciones con los valores asignados, para así averiguar los valores restantes.</p> <p>2. Escribir brevemente todos los datos recopilados. Los datos fueron recopilados aplicando nociones de trigonometría en un triángulo rectángulo, de ellos, se despejaron las variables que faltaban, es decir, "x" y por consiguiente "B". Luego, se pudo determinar el área del trapecio isósceles: $A = \frac{1}{2}(b + B) \cdot h$ y por último obtuvimos mediante la aplicación de la derivada del área de θ y la igualación a cero, se pudo dar con los dos posibles valores de θ, que son: $\frac{\pi}{4} \vee \theta = \frac{3}{4}$</p> <p>3. Sacar conclusiones. Las conclusiones que podemos plantear son que mediante el correcto análisis de los datos otorgados y una rigurosa aplicación de ecuaciones se pueden obtener los valores que nos faltan y así llegar a una correcta optimización aplicada.</p> <p>4. ¿Qué complicaciones podemos tener con el plan? Las complicaciones que se nos pueden presentar son no examinar la totalidad de la información o errar tanto en la obtención de un dato y el procedimiento que se realizó en el problema.</p>	<p>Despejamos la incógnita x, con trigonometría:</p>  <p>$\text{sen}\theta = \frac{C. Opuesta}{Hipotenusa} = \frac{x}{1} \Rightarrow \text{sen}\theta = x$ $\text{cos}\theta = \frac{C. Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{y}{1} \Rightarrow \text{cos}\theta = y$</p> <p>Entonces, los lados del trapecio son: $b = 1 \text{ (m)}$ $B = 2 \cdot \text{sen}\theta + 1 \text{ (m)}$ $h = \text{cos}\theta \text{ (m)}$</p> <p>Con los lados determinamos el área del trapecio en función de θ: Fórmula área del trapecio isósceles: $A = \frac{1}{2}(b + B) \cdot h$</p> <p>$A(\theta) = \frac{1}{2}(1 + 2 \cdot \text{sen}\theta + 1) \cdot \text{cos}\theta \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2 + 2 \cdot \text{sen}\theta) \cdot \text{cos}\theta$ $\Leftrightarrow (1 + \text{sen}\theta) \cdot \text{cos}\theta$</p> <p>Luego, se tiene que el área del trapecio es: $A(\theta) = (1 + \text{sen}\theta) \cdot \text{cos}\theta$</p> <p>Se saca la primera derivada de $A(\theta)$ con regla de la cadena: $A'(\theta) = (1 + \text{sen}\theta)' \cdot \text{cos}\theta + \text{cos}\theta' \cdot (1 + \text{sen}\theta)$ Obs. $\text{sen}'\theta = \text{cos}\theta$ $= \text{cos}\theta \cdot \text{cos}\theta + (-\text{sen}\theta) \cdot (1 + \text{sen}\theta)$ Obs. $\text{cos}'\theta = -\text{sen}\theta$ $= \text{cos}^2\theta - \text{sen}\theta(1 + \text{sen}\theta)$ Obs. $\text{cos}^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$ $= 1 - \text{sen}^2\theta - 2\text{sen}^2\theta \Leftrightarrow (1 + \text{sen}\theta)(1 - 2 \cdot \text{sen}\theta)$</p> <p>Ahora, se igualará a cero la primera derivada: $A'(\theta) = 0 \Leftrightarrow (1 + \text{sen}\theta)(1 - 2 \cdot \text{sen}\theta) = 0 \vee (1 + \text{sen}\theta) = 0 \vee (1 - 2 \cdot \text{sen}\theta) = 0$ $\Rightarrow \text{sen}\theta = -1 \vee \text{sen}\theta = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \vee \theta = \frac{\pi}{6}$ Obs. Posibles valores del ángulo</p>



PASO 4: MIRAR HACIA ATRÁS	
DESARROLLO VERBAL Operaciones mentales	DESARROLLO MATEMÁTICO
<p>1. ¿La solución es correcta? Sí, ya que tal como se ve en el desarrollo matemático se comprobó.</p> <p>2. ¿Observamos una solución más sencilla? Se utilizó el método más sencillo para llegar al resultado, esto es: plantear ecuaciones, derivar, hallar raíces y comprobar. Otro método podría haber sido estimando el valor del ángulo con un transportador e ir recopilando las cantidades en una tabla, pero como ya se sabe, los dibujos son solo representaciones, y las posibilidades de ángulos serían muchas.</p> <p>3. ¿La respuesta satisface lo establecido en el problema? Sí, ya que se pedía el ángulo donde el abrevadero alcanza su máximo volumen y se encontró.</p>	<p>Anteriormente, se determinaron los posibles ángulos θ, ¿pero cual solución es la correcta? $\theta = \frac{3\pi}{2} \vee \theta = \frac{\pi}{6}$</p> <p>Veamos el triángulo rectángulo que comprende el ángulo:</p>  <p>Se debe cumplir que: $A' + B' = 90^\circ$</p> <p>Por tanto, el ángulo A (o también denotado anteriormente por θ) no puede ser $\frac{3\pi}{2}$, ya que por suma de ángulos interiores, esta sería mayor que 180°</p> <p>Ahora, como se trata de una optimización, se puede comprobar con la 2da derivada, si la solución hallada es correcta.</p> <p>$A''(\theta) = (1 - \text{sen}\theta - 2 \cdot \text{sen}^2\theta)'$ $= -\text{cos}\theta(1 + 2 \cdot \text{sen}\theta)$</p> <p>Evaluando con $\theta = \frac{\pi}{6}$, se tiene: $A''(\frac{\pi}{6}) = -1.018 < 0$ Obs. Si en este paso se obtiene un $x < 0$ por optimización, corresponde al "máximo".</p> <p>Entonces con $\theta = \frac{\pi}{6}$, efectivamente se cumplirá que el volumen del abrevadero será máximo.</p>

7.-Referencias

- [1] Lara, A., Elizalde, L., Rolando, R. (2014) *Retención de primer año de educación superior. Programa de pregrado Santiago Chile*. Retrieved from Ministerio de Educación Gobierno de Chile Web site: <http://www.mifuturo.cl/index.php/estudios/estudios-recientes>
- [2] *Síntesis de resultados SIMCE 2011*. Retrieved from Agencia de Calidad de la Educación Gobierno de Chile Web site <http://www.agenciaeducacion.cl/simce/resultados-simce/>.
- [3] Aliaga, M., Lara, A., Rolando, R. (2014) *Duración real de las carreras en Chile. Programas de pregrado y posgrado*. Retrieved from Ministerio de Educación Gobierno de Chile Web site: <http://www.mifuturo.cl/index.php/estudios/estudios-recientes>
- [4] Felder R.M., Brent R. (2002) *Designing and teaching courses to satisfy engineering criteria 2000*. Retrieved from <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED461515.pdf>
- [5] Schoenfeld, Alan (1992) *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics*. In Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan.
- [6] Pólya G. (1962), *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*. 2 vols. New York: John Wiley & Son.
- [7] Guzmán, M. De, (1984). *Cuentas con cuentos*. Barcelona, Labor, 1984(1ª ed).
- [8] Vega, M.A. (2012) *Análisis de la construcción del concepto de la derivada en un primer ciclo de enseñanza superior asistida por ordenador*. Repositorio Institucional de la Universidad de Huelva. ISBN 978-84-15633-93-8
-

Sobre los autores:

María Luisa Saavedra Quintana- Ingeniero Civil Químico, Magister en Logística- Académica de la Universidad de Santiago. Coordinadora asignatura Métodos de Estudio.

marialuisa.saavedra@usach.cl

María Angélica Vega Urquieta –Profesor de Estado en Matemática y Estadística- Magister en Matemática – Doctora en Educación Matemática. Universidad de Chile. mavega@ciq.uchile.cl