

# UN ISOMORFISMO ENTRE TEORÍA DE VÓRTICE Y TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA PARA LA OBTENCIÓN Y ENSEÑANZA DE LA LEY DE BIOT-SAVART

Julio Pozo Pérez  
Instituto de Ciencias Básicas  
Facultad de Ingeniería  
Universidad Diego Portales  
Avenida Ejercito 441. Santiago  
e-mail: [julio.pozo@mail.udp.cl](mailto:julio.pozo@mail.udp.cl)

## RESUMEN

En este trabajo se establece un isomorfismo entre la teoría de vórtices y la teoría electromagnética, con el objeto de obtener la Ley de Biot-Savart y establecer una base teórica que dé cuenta de su comportamiento. Utilizando la teoría de vórtice a través de la geometría del hilo de vórtice se encuentra en forma teórica la ley de Biot-Savart (B-S), permitiendo con esto establecer una analogía entre vorticidad y densidad de corriente como fuentes de inducción de campos de velocidad y de campos magnéticos. Dentro de este contexto, el uso del teorema de Helmholtz (de la descomposición) juega un rol importante y es fundamental en la obtención de una expresión matemática que dentro de la teoría electromagnética recibe el nombre de ley de B-S.

PALABRAS CLAVES: Vórtice, vorticidad, hilo de vórtice, Biot-Savart.

## INTRODUCCIÓN

La realización de este trabajo tiene que ver con el hecho que la mayoría de la información que aparece en la literatura, muestra que la ley de B-S ha sido obtenida a partir de diversos experimentos los cuales constituyen su base experimental. Dado que el desarrollo de este trabajo involucra algunos tópicos tanto de la teoría electromagnética a través de la ley de B-S (Jackson (1998) y Panofsky et al (1962)) como de la teoría de vórtice a través del hilo de vórtice o vorticoso (Helmholtz (1858) y (1867)) en esta introducción se destacan algunos de los aspectos que se consideran más relevantes de ambas teorías.

**La teoría electromagnética y la ley de Biot-Savart:** Fue Oersted quien en 1819 observó que al pasar una corriente eléctrica por un conductor (un alambre) se producían desviaciones en dipolos magnéticos ubicados en sus cercanías, esto indica que las corrientes eléctricas son fuentes de campo magnético (Jackson (1998)). Biot y Savart en 1820 y posteriormente Ampere entre los años 1820 y 1825, mediante experimentos más elaborados, establecieron por formas distintas las leyes experimentales básicas que relacionan al campo magnético  $\vec{B}$  (inducción magnética) con las corrientes eléctricas  $I$ .

La relación fundamental establecida por Biot y Savart, considera lo siguiente: si  $d\vec{l}$  es un elemento de longitud de un conductor muy delgado por el circula una corriente eléctrica  $I$  en el

sentido de  $d\vec{l}$ , y  $\vec{r}$  es el vector posición que va desde  $d\vec{l}$  hasta un punto  $p$  que es donde se quiere determinar el valor del campo  $d\vec{B}$ , tal como se muestra en la figura N° 1, entonces el campo magnético  $d\vec{B}$  en el punto  $p$  debido al elemento de corriente en  $d\vec{l}$ , está dado por:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(d\vec{l} \times \vec{r})}{r^3} \quad (1)$$

Dado que  $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ , entonces se puede escribir:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(d\vec{l} \times \hat{r})}{r^3} \equiv \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(d\vec{l} \times \hat{r})}{r^2} \quad (2)$$

Cabe destacar que la ecuación (2) es la que se pretende obtener en forma teórica a partir de la teoría de vórtice, para lo cual es necesario previamente considerar algunos conceptos y aspectos que son relevantes para realizar la descripción.

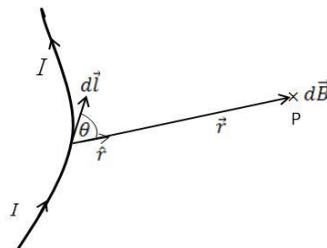


Figura N° 1

**La teoría de vórtices:** Dentro del contexto de la dinámica de fluidos (Kundu et al (2002)) se puede comentar que un vórtice se forma cuando el fluido se moviliza en torno a un círculo, como espiral o en forma de hélice. Este tipo de movimiento puede encontrarse en fenómenos naturales, como los remolinos o torbellinos. La vorticidad (Kragh, H. (2002) y Steven van der Laan (2012)) es un concepto matemático usado en dinámica de fluidos que se puede relacionar con la cantidad de circulación o rotación de un fluido y se define como la circulación por unidad de área en un punto del flujo (Lighthill (1986) y Saffman (1995)).

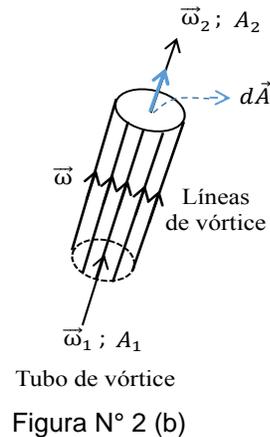
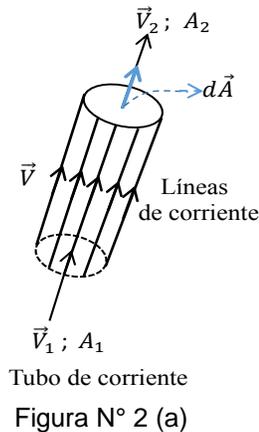
**Tubo de corriente y tubo de vórtice:** Para tener una mayor claridad con respecto de los conceptos utilizados y en particular con el hilo de vórtice, es necesario realizar una descripción y establecer una analogía entre tubo de corriente y tubo de vórtice.

Se considera que un tubo de corriente es aquel donde sus paredes están formadas por líneas de corriente tal como se muestra en la figura N° 2 (a). Según la definición de líneas de corriente a través de la pared de este tubo no existe flujo. Si la sección del tubo es infinitesimal, entonces éste recibe el nombre de hilo de corriente.

Por analogía con un tubo de corriente, se define un tubo de vórtice como aquel donde sus paredes están formadas por líneas de vórtice figura N° 2 (b), que es aquella donde su tangente en todos los puntos es paralela al vector vorticidad en un instante dado figura N° 3. Si la sección del tubo es infinitesimal, entonces éste recibe el nombre de hilo de vórtice o hilo vorticoso.

La figura N° 2 (a) muestra un segmento de tubo de corriente con secciones  $A_1$  y  $A_2$  y sus velocidades respectivas  $\vec{V}_1$  y  $\vec{V}_2$ , en la figura N° 2 (b) se muestra en forma similar un tubo de vórtice donde  $\vec{\omega}_1$  corresponde a la vorticidad en la sección 1 y  $\vec{\omega}_2$  a la vorticidad en la sección 2, el concepto de vorticidad  $\vec{\omega}$  será definida más adelante, mientras tanto se puede comentar que

ésta corresponde a la circulación por unidad de área en un punto del flujo tal como se mencionó anteriormente.



## DESARROLLO

Los orígenes de la dinámica de vórtices se encuentran en el trabajo fundamental de Hermann von Helmholtz, quien introdujo los conceptos de la línea de vórtice y de hilo de vórtice en el cual el fluido delimitado por las líneas de vórtice pasan por los puntos de una "curva cerrada infinitamente pequeña", además también derivó la ecuación de la vorticidad para un fluido ideal incompresible. El año 2007 marcó el centenario de la muerte de William Thomson (Lord Kelvin) (Thomson (1869)), uno de los grandes pioneros de la dinámica de vórtice del siglo XIX. Kelvin se inspiró en el famoso artículo de Helmholtz (Helmholtz (1858)) "Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen". También traducido y publicado en inglés por P.G.Tait (Tait (1867)).

**Hilo de vórtice:** Teniendo presente lo anterior, es posible dibujar el hilo de vórtice como se observa en la figura N°3, donde se ha agregado otro concepto auxiliar para realizar la descripción del sistema, que es la línea de vórtice  $\gamma$  (o línea de campo de vórtice) en analogía con la línea de fuerza o de campo del electromagnetismo. En la figura N° 3 se muestra un hilo de vórtice (hv) con circulación  $\Gamma$  y con líneas de vórtice  $\gamma$ .

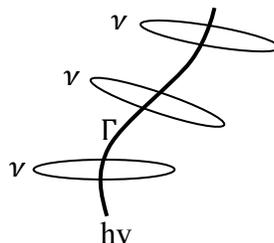


Figura N° 3

**Analogía entre teoría de vórtice y teoría electromagnética:** La circulación  $\Gamma$  se define como la integral alrededor de la curva, de la componente de la velocidad tangente a la curva. Si  $d\vec{l}$  representa un elemento de contorno en una curva cerrada C y  $\vec{V}$  es la velocidad en ese punto figura N° 4, entonces la circulación se puede escribir en la forma:

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} \quad (3)$$

Si se utiliza el teorema de Stokes sobre una superficie abierta  $A$  limitada por una curva cerrada  $C$ , se puede escribir

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{A} \quad (4)$$

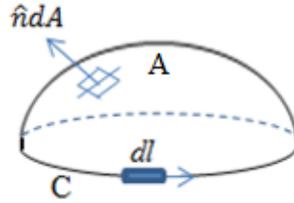


Figura N° 4

Donde  $d\vec{A} = \hat{n}dA$  y  $\hat{n}$  es un vector unitario normal a la tangente en un punto de una superficie. Ahora la circulación se puede escribir como:

$$\Gamma = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{A} \quad (5)$$

Por convención esta integral se hace en sentido opuesto a las manecillas del reloj

La vorticidad  $\vec{\omega}$  se define como el rotacional de la velocidad  $\vec{V}$ , esto es:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \quad (6)$$

Con lo cual la circulación se puede expresar a través de la vorticidad mediante la ecuación

$$\Gamma = \int_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A} \quad (7a)$$

La ecuación anterior es relevante puesto que permite relacionar y comparar la teoría de vórtices con la teoría electromagnética a través de una ecuación para intensidad de corriente eléctrica  $I$ , expresada en término de una densidad de corriente  $\vec{j}$ .

$$I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \quad (7b)$$

Por otro lado, en la figura N° 5(a) se muestran las líneas de campo y el campo magnético  $\vec{B}$  inducido por una corriente eléctrica  $I$  que pasa por un alambre. En la figura N° 5(b) se muestran las líneas de vórtice y el campo de velocidad  $\vec{V}$  inducido por la circulación  $\Gamma$  que pasa por un hilo de vórtice.

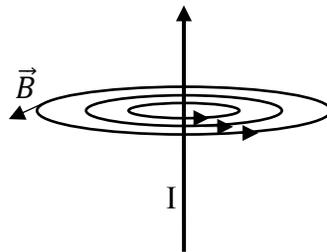


Figura N° 5(a)

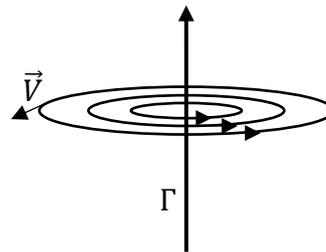


Figura N° 5(b)

RESULTADOS

Teniendo presente las figuras anteriores, se puede construir la tabla I, donde se establece una analogía entre algunos conceptos de la teoría electromagnética y la teoría de vórtices que corresponde a la parte central de este trabajo y que es lo que se pretende relacionar.

TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA	TEORÍA DE VÓRTICE
Alambre conductor con corriente que induce un campo magnético $\vec{B}$	Hilo de vórtice que induce un campo de velocidad $\vec{V}$
Líneas de campo magnético generada e inducida por el alambre con corriente	Líneas de vórtice (líneas de campo de velocidad) generada e inducida por el hilo de vórtice
Corriente eléctrica a través de una elemento de sección transversal $dA$ de un alambre conductor y densidad de corriente $J$ $I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}; J = \frac{dI}{dA}$ (7b)	Circulación o corriente a través de una elemento de sección transversal $dA$ de una línea de vórtice $\gamma$ y circulación $\Gamma$ $\Gamma = \int_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A}; \omega = \frac{d\Gamma}{dA}$ (7a)

Tabla I

**Geometría del hilo de vórtice:** En lo que sigue consideraremos un modelo particular, el hilo de vórtice (Santaló (1969)). Recordemos que dado un campo de vectores  $\vec{A}$  podemos construir con él un nuevo campo  $\vec{U}$ , llamado campo de vórtices o campo de rotor del campo  $\vec{A}$  dado por:

$$\vec{U} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{8}$$

Las líneas de vórtice son tales que en cada punto tienen por tangente al vector vorticidad figura N°5 (a), ahora si consideramos una curva cerrada sin nudos y si por cada uno de sus puntos pasamos una línea de vórtice obtenemos un tubo de vórtice, si la sección normal del tubo es infinitesimal obtenemos un "hilo de vórtice".

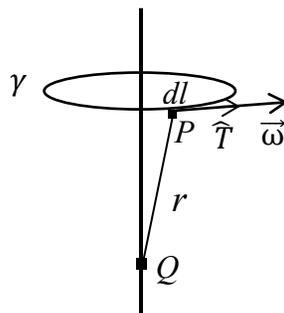


Figura N° 6 (a).  
Hilo de vórtice con línea de vórtice  $\gamma$

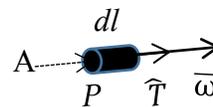


Figura N° 6 (b).  
Amplificación de  $dl$  para localizar la sección A y visualizar el elemento de volumen  $d\tau = Adl$

Consideraremos ahora un campo de velocidades  $\vec{V}$ , tal que sus derivadas parciales son continuas en todo el espacio. Entonces de acuerdo al teorema de Helmholtz de la descomposición (Arfken et al. (1995) y (2005)) que afirma que cualquier campo vectorial

$\vec{V}$  puede ser descompuesto en la suma de una componente irrotacional (cuyo rotor debe ser cero) y otra componente rotacional o solenoidal (cuya divergencia debe ser cero) en la forma.

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{\omega} \quad (9)$$

Luego  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0$ , y  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\omega}) = 0$ , donde  $\phi$  es el potencial escalar del campo y  $\vec{\omega}$  el potencial vector del mismo campo. Para encontrar  $\phi$  aplicamos el operador divergencia en la ecuación (9) y obtenemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \nabla^2 \phi \quad (10)$$

Cuya solución es

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{V}}{r} d\tau \quad (11)$$

Análogamente, para encontrar  $\vec{\omega}$  aplicamos ahora el operador rotor a la ecuación (9) y obtenemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\omega}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}) - \nabla^2 \vec{\omega} \quad (12)$$

Si ahora imponemos sobre  $\vec{\omega}$  la condición de ser rotacional, entonces tenemos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0 \quad (13)$$

Bajo estas condiciones la ecuación (12) se transforma en la ecuación (14), dada por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = -\nabla^2 \vec{\omega} \quad (14)$$

Cuya solución está dada por:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} \times \vec{V}}{r} d\tau \quad (15)$$

Reemplazando los resultados de las ecuaciones (11) y (15) en la ecuación (9) obtenemos:

$$\vec{V} = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \left( \int \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{V}}{r} d\tau \right) + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left( \int \frac{\vec{\nabla} \times \vec{V}}{r} d\tau \right) \quad (16)$$

Cabe destacar que en la teoría de vectores, la ecuación (16) representa un resultado general.

Consideremos ahora la velocidad creada por un hilo de vórtice, esto significa que en la ecuación (16) hacemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (17)$$

Lo que implica que el campo de velocidades no tiene fuentes ni sumideros (desagües), y la velocidad inducida por el vórtice es:

$$\vec{V} = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left( \int \frac{\vec{\omega}}{r} d\tau \right) \quad (18)$$

Donde el vector vorticidad queda definido por la ecuación (6) como:  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$ . En la ecuación (18) la integración es sobre la línea de campo de vórtice  $\gamma$ , y  $r$  es la distancia de un punto  $Q$  del hilo de vórtice a un punto  $P$  de la línea de campo de vórtice que es el punto donde se evalúa el campo de velocidades  $\vec{V}$ . Para visualizar en mejor forma el elemento de volumen de la línea de campo de vórtice, se ha realizado una ampliación del elemento de longitud  $dl$  permitiendo localizar su sección  $A$  como se observa en la figura N° 6 (b), entonces se puede escribir que este elemento de volumen está dado por  $d\tau = Adl$ .

Si  $\gamma$  es una línea de campo de vórtice y  $\hat{T}$  es el vector unitario tangente (o versor), tal como se muestra en la figura N° 6 a), se puede escribir,  $\vec{\omega} = |\vec{\omega}| \hat{T}$ , por otro lado, el elemento de volumen  $d\tau = Adl$  se puede ser expresado como el producto de una sección de la línea de campo de vórtice y la altura, que en este caso corresponde al elemento de la longitud de arco  $dl$ , bajo estas consideraciones la ecuación (18) se transforma en.

$$\vec{V} = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left( \int \frac{|\vec{\omega}| \hat{T}}{r} Adl \right) \quad (19)$$

Sabemos que para un hilo de vórtice tanto el módulo del vector vorticidad  $|\vec{\omega}|$  como el área  $A$  de una sección es constante (Panofsky et al (1962)), luego la ecuación (19) la podemos escribir como:

$$\vec{V} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \left( \int_{\gamma} \vec{\nabla} \times \left( \frac{\hat{T}}{r} \right) dl \right) \quad (20)$$

Donde  $\Gamma = |\vec{\omega}|A$  lo que finalmente nos da el resultado.

$$\vec{V} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\gamma} \left( \frac{\vec{r} \times \hat{T}}{r^3} \right) dl \quad (21)$$

Haciendo  $\hat{T} dl = d\vec{l}$ , obtenemos

$$\vec{V} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\gamma} \left( \frac{\vec{r} \times d\vec{l}}{r^3} \right) \quad (22)$$

Dado la propiedad anti conmutativa del producto escalar, también se puede escribir

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\gamma} \left( \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \right) \equiv \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\gamma} \left( \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \right) \quad (23)$$

Dada la estructura y similitud que tiene la ecuación (23) con la ecuación (2), en electromagnetismo esta expresión recibe el nombre de "ley de Biot-Savart".

## CONCLUSIONES

Teniendo presente las ecuaciones (7a) y (7b) que relacionan en forma respectiva la vorticidad  $\vec{\omega}$  con la circulación  $\Gamma$  y la densidad de corriente  $\vec{j}$  con la corriente eléctrica  $I$ , se encuentra una analogía entre vorticidad y densidad de corriente como fuentes de inducción de campos de velocidad y de campo magnético. Esta analogía se puede apreciar en forma más directa al comparar la ecuación (23) con ecuación (2).

Si en la ecuación (23) se toma en consideración la analogía establecida en la tabla I, y la circulación  $\Gamma$  se relaciona con la intensidad de corriente  $I$  que circula por un alambre conductor,

a través de  $\Gamma \equiv \mu_0 I$ , se encuentra que el valor del campo de velocidad  $\vec{V}$  corresponde al campo magnético  $\vec{B}$  de la ecuación (2), obteniéndose una equivalencia entre la ecuación (23) que se deriva de la teoría de vórtice y la ecuación (2) que corresponde a la ley de Biot-Savart del electromagnetismo. En las figuras N° 5(a) y N° 5(b), y en la tabla I, se muestra una representación esquemática de la equivalencia mencionada anteriormente.

Dentro del contexto de la teoría de vórtice, lo más importante es la utilización del teorema de Helmholtz de la descomposición que permite que en un flujo incompresible su campo de velocidad  $\vec{V}$ , pueda ser escrito como un vector suma de una componente irrotacional y otra componente rotacional ecuación (9), lográndose con esto encontrar una ecuación equivalente y que corresponde a la ley de B-S (23), la cual puede ser utilizada para calcular el campo de velocidad inducida por un conocido campo de vorticidad, ley que también es aplicable y muy importante en la teoría electromagnética donde permite describir las propiedades magnéticas de una corriente eléctrica, estableciéndose que las corrientes son fuentes de campo magnético.

## REFERENCIAS

Arfken, G. & Weber, H. (1995). *Mathematical Methods for Physicists*, (4<sup>th</sup>. ed.). Academic Press: San Diego.

Arfken, G. & Weber, H. (2005). *Mathematical Methods for Physicists, International Edition* (6<sup>th</sup>. ed.). Academic Press: San Diego.

Helmholtz, H. (1858). Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *Journal für den reine und angewandte Mathematik*, 55, 25–55.

Helmholtz, H. (1867). On the Integrals of Hydrodynamical Equations, which Express Vortex Motions. *Philosophical Magazine*, 33, 485–512.

Jackson, J. (1998). *Classical Electrodynamics* (3<sup>rd</sup>. ed.). Wiley. ISBN 0-471-30932-X.

Kundu, P. & Cohen, I. (2002). *Fluid Mechanics*, (2<sup>nd</sup>. ed.). Academic Press.

Kragh, H. (2002). The Vortex Atom: A Victorian Theory of Everything. *Centaurus*, volume 44, pp. 32–114.

Lighthill, M. (1986). *An Informal Introduction to Theoretical Fluid Mechanics*, Oxford University Press, ISBN 0-19-853630-5.

Panofsky, W. & Phillips, M. (1962). *Classical Electricity and Magnetism*, (2<sup>nd</sup>. ed.). Addison – Wesley Publishing Company, ISBN 0-201-05702-6.

Saffman, P. (1995). *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press, ISBN 0-521-42058-X.

Santaló, L. (1969). *Vectores y Tensores con sus Aplicaciones*. Eudeba, pág.181.

Tait, P. (1867). (Translation of Helmholtz, 1858). On the integrals of the hydrodynamical equations, which express vortex-motion, *Phil. Mag.*, 33, 485–512.

Thomson, W. (aka Lord Kelvin), (1869). On vortex motion, *Trans. Roy. Soc. Edin.*, 25, 217–260.

Van der Laan, S. (2012). *The Vortex Theory of Atoms*, Thesis for the master's degree in History and Philosophy of Science. Institute for History and Foundations of Science Utrecht University.